I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Do kruhových políček doplňte přirozená čísla od 1 do 20 tak, aby každé číslo bylo použito právě jednou a současně platily všechny uvedené vztahy. (*M. Smitková*)

$$\bigcirc \xrightarrow{-5} \bigcirc \xrightarrow{:8} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 9} \bigcirc \xrightarrow{-2} \bigcirc$$

$$\bigcirc \xrightarrow{+3} \bigcirc \xrightarrow{:7} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 3} \bigcirc \xrightarrow{+12} \bigcirc$$

$$\bigcirc \xrightarrow{-2} \bigcirc \xrightarrow{+3} \bigcirc \xrightarrow{:5} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 4} \bigcirc$$

$$\bigcirc \xrightarrow{:4} \bigcirc \xrightarrow{+7} \bigcirc \xrightarrow{:2} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 3} \bigcirc$$

Nápověda. Některá políčka připouští méně možností ke zkoušení než jiná.

Možné řešení. Při doplňování je vhodné začít s políčky předcházejícími dělení. Přitom větší dělitel znamená méně možností.

Např. ve druhém políčku na prvním řádku může být buď 8, nebo 16 (jediná čísla od 1 do 20 dělitelná 8). Pokud by v tomto políčku bylo 16, muselo by v předchozím políčku být 21 ($21 - 5 = 16$), což je ovšem víc než 20. Proto je v onom políčku 8. Podle předepsaných operací doplníme celý řádek a ověříme, že se žádné číslo neopakuje:

$$13 \xrightarrow{-5} 8 \xrightarrow{:8} 1 \xrightarrow{\cdot 9} 9 \xrightarrow{-2} 7$$

Ve druhém políčku na druhém řádku může být buď 7, nebo 14 (jediná čísla od 1 do 20 dělitelná 7). Číslo 7 je už použito v předchozím řádku, tedy je v onom políčku 14. Podle předepsaných operací doplníme celý řádek a ověříme, že se žádné číslo neopakuje:

$$11 \xrightarrow{+3} 14 \xrightarrow{:7} 2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{+12} 18$$

Ve třetím políčku na třetím řádku může být 5, 10, 15, nebo 20 (jediná čísla od 1 do 20 dělitelná 5). Žádné z těchto čísel není zatím použito, takže můžeme zkoušet dosazovat:

- Pokud bychom dosadili 5, resp. 10, potom by v následujícím políčku (po dělení 5) bylo 1, resp. 2. Obě tato čísla jsou již použita na předchozích řádcích.
- Pokud bychom dosadili 15, potom by v předchozím políčku bylo 12 ($12 + 3 = 15$) a v prvním políčku 14 ($14 - 2 = 12$). Toto číslo je však použito na druhém řádku.

- Nezbývá než dosadit 20. Podle předepsaných operací doplníme celý řádek a ověříme, že se žádné číslo neopakuje:

$$19 \xrightarrow{-2} 17 \xrightarrow{+3} 20 \xrightarrow{:5} 4 \xrightarrow{\cdot 4} 16$$

Na poslední řádek zbývají zatím nepoužitá čísla 3, 5, 10, 12 a 15. V prvním políčku musí být 12 (jediné z těchto čísel dělitelné 4). Doplnění podle předepsaných operací vyčerpává právě zbylá čísla, tedy se vskutku nic neopakuje:

$$12 \xrightarrow{:4} 3 \xrightarrow{+7} 10 \xrightarrow{:2} 5 \xrightarrow{\cdot 3} 15$$

Z5–I–2

Trpaslíci natírali krychlové kostky zelenou a bílou barvou tak, že každá stěna byla celá obarvena jednou z těchto dvou barev. Po chvíli si všimli, že některé obarvené kostky vypadají po vhodném pootočení zcela stejně a začali je podle tohoto hlediska třídit do skupin (ve stejné skupině jsou stejně obarvené kostky).

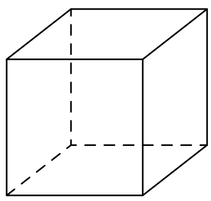
Kolik nejvýše skupin mohli takto dostat? (*I. Jančigová*)

Nápověda. V jakých vztazích mohou být dvojice stěn krychle?

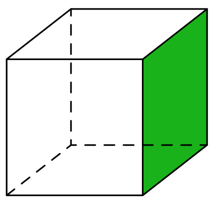
Možné řešení. Krychle má šest stěn, přičemž každá stěna sousedí se čtyřmi dalšími stěnami (mají společnou hranu) a s jednou stěnou je rovnoběžná (žádný společný bod).

Možná obarvení můžeme třídit podle počtu zelených (resp. bílých) stěn. Takto dostáváme sedm možností, pro něž postupně rozebereme různé typy obarvení.

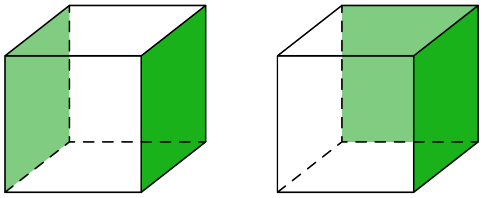
- Žádná stěna zelená (všechny bílé): všechny takové krychle vypadají stejně, tedy máme jediný typ.



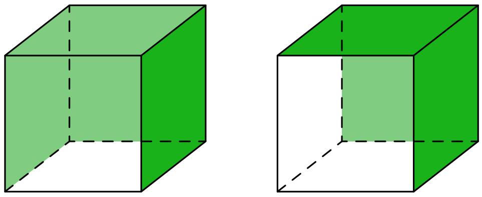
- Jedna stěna zelená (pět bílých): taktéž jediný typ.



- Dvě stěny zelené (čtyři bílé): rozlišujeme dva typy podle toho, zda spolu zelené stěny sousedí, či nikoli.



- Tři stěny zelené (tři bílé): rozlišujeme dva typy, podle toho, zda zelené stěny sousedí po dvou, či všechny navzájem.



- Ostatní případy není třeba vypisovat: diskuze pro možnosti s prohozenými počty zelených a bílých stěn jsou stejné.

Celkem dostáváme $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$ typů obarvení. Trpaslíci mohli dostat nejvýše 10 skupin obarvených kostek.

Z5–I–3

Adámek přepočítával svoji sbírku duhových kuliček. Zjistil, že je může rozdělit do stejně početných hromádek, a to vícero způsoby. Kdyby je rozdělil do tří hromádek, bylo by v každé hromádce o osm kuliček víc, než by bylo v každé hromádce při dělení do čtyř hromádek.

Kolik měl Adámek duhových kuliček? (*E. Semerádová*)

Nápověda. Představte si skutečné přeskupování kuliček ze čtyř hromádek do tří.

Možné řešení. Přeskupování kuliček ze čtyř hromádek do tří lze provést tak, že všechny kuličky z jedné hromádky se rozdělí do třech zbylých.

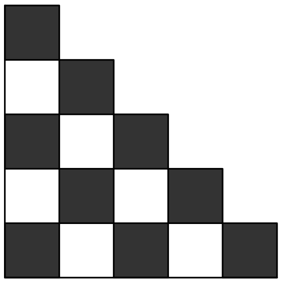
V každé ze tří nových hromádek bylo o osm kuliček víc než původně, tedy hromádka, ze které se rozdávalo, měla 24 kuliček ($3 \cdot 8 = 24$).

Všechny hromádky byly stejně početné a původně byly čtyři, tedy Adámek měl 96 kuliček ($24 \cdot 4 = 96$).

Poznámka. Pokud neznámý počet kuliček v každé ze čtyř hromádek označíme k, potom podmínku ze zadání lze vyjádřit jako $4k = 3 \cdot (k + 8)$. Rozepsáním dostáváme $4k = 3k + 24$, tedy $k = 24$.

Z5–I–4

Jarda vystřihl z rohu šachovnice následující útvar sestávající z patnácti polí:

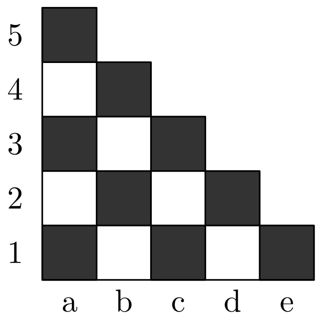


Následně odstřihl několik dalších polí, a to tak, že výsledný útvar neobsahoval díry a nerozpadal se, měl stejný počet černých a bílých polí a měl největší možný obsah. Navíc zjistil, že ze všech možných útvarů s těmito vlastnostmi měl ten jeho největší možný obvod.

Která pole Jarda dodatečně odstřihl? Určete všechny možnosti. (*M. Petrová*)

Nápověda. Jakou barvu měla vystřižená pole? A kolik jich bylo?

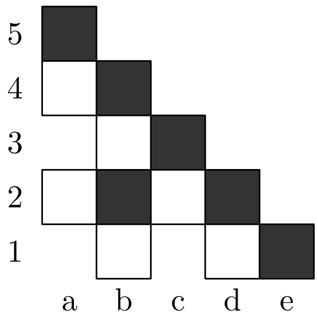
Možné řešení. Původní Jardův útvar tvořilo 9 černých a 6 bílých polí, tedy černých polí bylo o 3 víc než bílých. Pokud po odstřižení dalších polí měl útvar stejný počet bílých a černých polí a současně největší možný obsah, musel Jarda odstřihnout 3 černá pole. Pro snazší vyjadřování si pole označíme jako na běžné šachovnici:

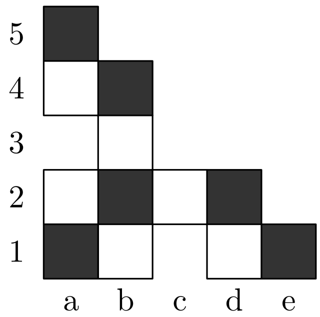


Aby nový útvar neobsahoval díry a ani se nerozpadl na více částí, nemohl Jarda odstřihávat pole jen tak (jistě např. nemohl odstřihnout pole b2 či pole c1 společně s polem d2). S tímto vědomím prozkoumáme, jak odstřižení jednotlivých polí ovlivňuje obvod útvaru:

- Po odstřižení kteréhokoli z polí a5 a e1 se obvod zmenší — místo původních tří stran se na obvodu projeví jedna nová.
- Po odstřižení kteréhokoli z polí a1, b4, c3 a d2 se obvod nezmění — místo původních dvou stran se na obvodu projeví dvě nové.
- Po odstřižení kteréhokoli z polí a3 a c1 se obvod zvětší — místo původní jedné strany se na obvodu projeví tři nové.

Tedy Jarda odstřihl pole a3, c1 a dále buď a1, nebo c3 (každá jiná volba by měla za následek rozpad či větší obvod útvaru):





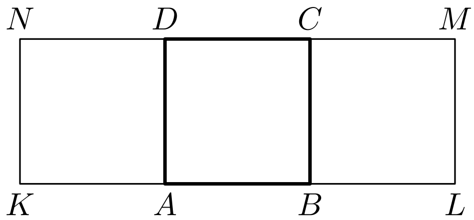
Z5–I–5

Na papíru byl sestrojen čtverec $ABCD$ se stranou 4 cm. Pavel sestrojil vrcholy obdélníku, který měl třikrát větší obsah než čtverec $ABCD$. Přitom rýsoval pouze kružnice, protože pravítko nenašel.

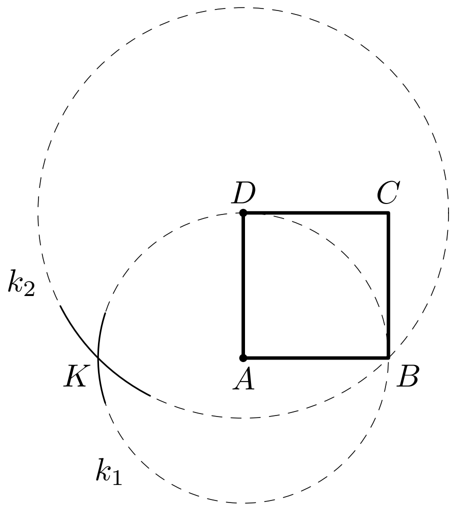
Jak mohl Pavel postupovat? Popište alespoň jednu konstrukci. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Uvažte nejprve obdélník složený ze dvou shodných čtverců.

Možné řešení. Pavlův obdélník pojmenujeme $KLMN$. Tento obdélník může být složen ze čtverce $ABCD$ a dalších dvou s ním shodných čtverců např. takto:

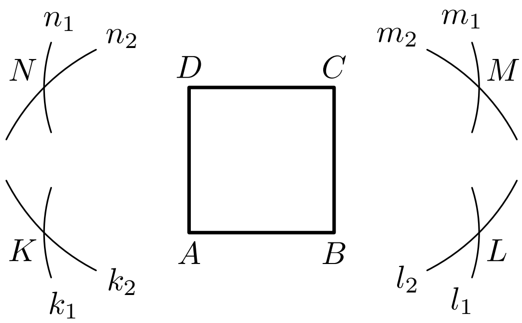


Úsečka AK je shodná se stranou čtverce, tedy bod K leží na kružnici se středem v bodě A a s poloměrem shodným s úsečkou AB; tuto kružnici označíme $k_1(A, AB)$. Úsečka DK je shodná s úhlopříčkou čtverce, tedy bod K leží na kružnici se středem v bodě D a s poloměrem shodným s úsečkou DB; tuto kružnici označíme $k_2(D, DB)$. Uvědomte si, že kružnice k_1 a k_2 mají dva společné body — kromě hledaného K ještě vrchol B daného čtverce.

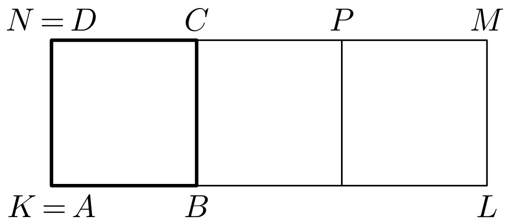


Obdobným způsobem lze sestrojit zbylé vrcholy obdélníku $KLMN$. Zkráceně je celá konstrukce popsána takto:

- bod K je průsečíkem kružnic $k_1(A, AB)$ a $k_2(D, DB)$ různým od bodu B,
- bod L je průsečíkem kružnic $l_1(B, BA)$ a $l_2(C, CA)$ různým od bodu A,
- bod M je průsečíkem kružnic $m_1(C, CD)$ a $m_2(B, BD)$ různým od bodu D,
- bod N je průsečíkem kružnic $n_1(D, DC)$ a $n_2(A, AC)$ různým od bodu C.



Poznámky. Vzájemný vztah čtverce $ABCD$ a obdélníku $KLMN$ můžeme uvažovat také např. takto:



V tomto případě stačí k sestrojení bodů L a M jeden další pomocný bod P, tedy celkem šest kružnic (místo osmi v předchozím řešení).

Uvědomte si, že obdélníků s trojnásobným obsahem vzhledem k danému čtverci je nepřeberné množství. Je zajímavé, že vrcholy každého takového obdélníku je možné sestrojit, avšak nalezení příslušné konstrukce není vůbec snadné. Např. pro obdélník se stranami $KL = 6 \cdot AB$ a $LM = \frac{1}{2} \cdot BC$ je hlavním problémem sestrojení středu úsečky pouze pomocí kružítka.

Z5–I–6

Na parkovišti stála auta a bicykly. Pokud by přijelo jedno další auto, bylo by jich stejně jako bicyklů. Pokud by přijelo pět dalších bicyklů, měly by všechny bicykly stejný počet kol jako všechna auta.

Kolik stálo na parkovišti aut a kolik bicyklů? (*M. Dillingerová*)

Nápověda. Představte si situaci, kdy souhlasí počty kol aut a bicyklů.

Možné řešení. Auto má čtyři kola, bicykl dvě; jedno auto má stejný počet kol jako dva bicykly.

Bicyklů na parkovišti bylo o jeden víc než aut. Uvažme situaci, kdy by na parkovišti bylo o pět bicyklů víc než původně, tedy situaci, kdy by souhlasily počty kol. V takovém případě by bylo bicyklů o šest víc než aut.

Šest bicyklů navíc znamená 12 kol navíc. Tento rozdíl odpovídá právě šesti autům (auto má o dvě kola víc než bicykl a $2 \cdot 6 = 12$). Tedy na parkovišti stálo šest aut a sedm bicyklů (o jeden víc než aut).

Poznámky. Úvahu v posledním odstavci nahrazuje zkoušení možností, kdy se postupně zvyšují počty dopravních prostředků a kontroluje se jejich rozdíl:

aut	3	4	5	6	...
bicyklů	6	8	10	12	...
rozdíl	3	4	5	**6**	...

Sledovaný rozdíl se stále zvětšuje, tedy úloha jiné řešení nemá.

Pokud bychom předpokládali, že každé auto má také jedno rezervní kolo, potom bychom obdobnými úvahami dospěli k závěru, že na parkovišti stála čtyři auta a pět bicyklů.

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Můj jediný syn se narodil, když mi bylo 37 let. To bylo právě 32 let po smrti dědečka, a ten zemřel ve svých 64 letech. Dědeček byl o 12 let starší než babička, brali se v roce 1947, právě když babičce bylo 18 let.

V kterém roce se narodil můj syn?

Poznámka: případné nesrovnalosti související s konkrétními daty narození ignorujte; můžete např. předpokládat, že všichni jmenovaní mají narozeniny ve stejný den.

(*M. Smitková*)

Nápověda. Kolik let bylo dědečkovi jako ženichovi?

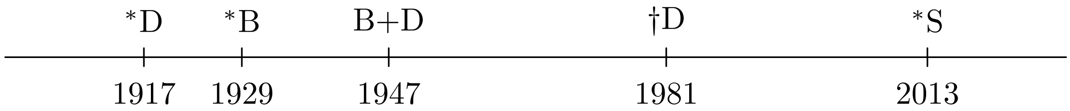
Možné řešení. Úlohu můžeme řešit podle daných informací odzadu:

V roce 1947 bylo babičce 18 let a dědečkovi 30 $(= 18 + 12)$.

Dědeček zemřel ve svých 64 letech, tedy 34 let po svatbě $(64 - 30 = 34)$, což bylo v roce 1981 $(= 1947 + 34)$.

Syn se narodil 32 let po smrti dědečka, tj. v roce 2013 $(= 1981 + 32)$.

Poznámka. Odvozené souvislosti lze znázornit na časové ose:



Uvědomte si, že bez dalších upřesnění je řešení úlohy nejednoznačné. Pokud by se např. dědeček narodil 31.12.1916 a babička 1.1.1929, byli by od sebe 12 let (a jeden den), přitom první letopočet by se lišil od výše uvedeného. Od řešitelů se neočekává diskuze více možností, nicméně postřehy či příklady tohoto druhu jsou chvalitebné.

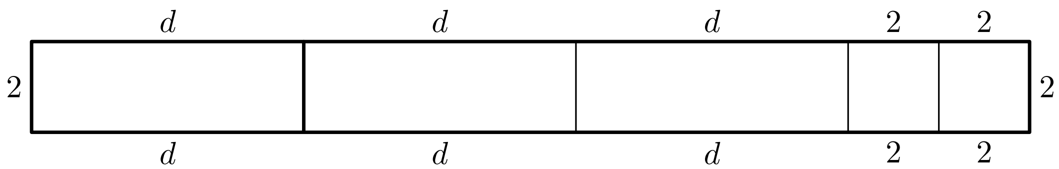
Z6–I–2

Petr měl obdélník šířky 2 cm a neznámé délky. Radka měla obdélník šířky 2 cm, jehož délka byla rovna obvodu Petrova obdélníku. Když k sobě obdélníky přiložili jejich šířkami, získali nový obdélník s obvodem 63 cm.

Určete obsah Petrova obdélníku. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Vyjádřete obvody obdélníků pomocí délky Petrova obdélníku.

Možné řešení. Označme neznámou délku Petrova obdélníku jako d. Petrův obdélník měl obvod $4 + 2d$ (cm), což byla délka Radčina obdélníku.



Složený obdélník měl obvod $6d + 12 = 63$ (cm). Odtud dostáváme $6d = 63 - 12 = 51$ (cm), a tedy $d = 51 : 6 = 17 : 2$ (cm).

Petrův obdélník měl obsah $2 \cdot d = 17\,(\mathrm{cm}^2)$.

Poznámka. Pro jakýkoli obdélník se stranami 2 a a lze vztah mezi jeho obsahem ($S = 2a$) a obvodem ($o = 4 + 2a$) vyjádřit jako $S = o - 4$.

Z předchozího znázornění je patrné, že obsah Radčina obdélníku je o $8\,\mathrm{cm}^2$ větší než dvojnásobek obsahu Petrova obdélníku, který označíme P. Tedy obsah složeného obdélníku je

$$3P + 8 = 63 - 4.$$

Odtud dostáváme $3P = 63 - 4 - 8 = 51$, a tedy $P = 17\,(\mathrm{cm}^2)$.

Z6–I–3

Míša zkoumá čísla, která lze vyjádřit jako součet alespoň dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. Obzvlášť ji zajímají čísla, která se takto dají vyjádřit vícero způsoby (např. $18 = 5 + 6 + 7 = 3 + 4 + 5 + 6$). Číslům, která lze takto vyjádřit alespoň třemi způsoby, říká velkolepá.

Najděte alespoň tři Míšina velkolepá čísla. (*V. Hucíková*)

Nápověda. Jaké výsledky lze získat součtem dvou, tří atd. po sobě jdoucích přirozených čísel?

Možné řešení. Dvě po sobě jdoucí čísla dávají součty

$$1 + 2 = 3, \quad 2 + 3 = 5, \quad 3 + 4 = 7, \quad \dots$$

Sčítance postupně zvětšujeme o 1, tedy součty se postupně zvětšují o 2.

Tři po sobě jdoucí čísla dávají součty

$$1 + 2 + 3 = 6, \quad 2 + 3 + 4 = 9, \quad 3 + 4 + 5 = 12, \quad \dots$$

Sčítance postupně zvětšujeme o 1, tedy součty se postupně zvětšují o 3.

Dále zjišťujeme, že nejmenší součet čtyř po sobě jdoucích čísel je $1 + 2 + 3 + 4 = 6 + 4 = 10$ a následující možné součty jsou 14, 18, 22, ...

Obdobnými úvahami dostáváme následující přehled součtů několika po sobě jdoucích čísel:

součty dvou	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	...
součty tří	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	...	
součty čtyř	10	14	18	22	26	30	34	38	42	...		
součty pěti	15	20	25	30	35	40	45	...				
součty šesti	21	27	33	39	45	...						

Hledaná velkolepá čísla jsou taková čísla, která patří alespoň do tří různých výše uvedených skupin. Tři nejmenší velkolepá čísla (a jejich příslušné rozklady) jsou:

$$15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5,$$
$$21 = 10 + 11 = 6 + 7 + 8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6,$$
$$27 = 13 + 14 = 8 + 9 + 10 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$$

Poznámka. Způsobů, jak velkolepá čísla hledat, je více. Např. pro každých šest po sobě jdoucích čísel platí, že součet prvního a šestého čísla je stejný jako součet druhého a pátého, a ten je stejný jako součet třetího a čtvrtého; tento součet je lichý a označíme jej a. Součet všech šesti čísel je pak roven $3a$, což je číslo, které lze vyjádřit jako součet tří po sobě jdoucích čísel $a-1$, a, $a+1$. Protože a je liché číslo, je také $3a$ liché a každé takové číslo je součtem dvou po sobě jdoucích čísel; při stávajícím značení $\frac{1}{2}(3a+1)$ a $\frac{1}{2}(3a-1)$.

Také platí, že součet lichého počtu po sobě jdoucích čísel je vždy násobkem tohoto počtu. Všechny tyto (a další zajímavé) poznatky lze s úspěchem kombinovat k nalezení dalších velkolepých čísel. Z uvedeného plyne, že velkolepých čísel je neomezené množství.

Z6–I–4

Kuba si zapsal čtyřmístné číslo, jehož dvě číslice byly sudé a dvě liché. Pokud by v tomto čísle vyškrtl obě sudé číslice, dostal by číslo čtyřikrát menší, než kdyby v tomtéž čísle vyškrtl obě liché číslice.

Které největší číslo s těmito vlastnostmi si mohl Kuba zapsat? (*M. Petrová*)

Nápověda. Které největší číslo mohl Kuba dostat po vyškrtnutí sudých číslic?

Možné řešení. Po vyškrtnutí sudých číslic má zbýt číslo, které je čtyřikrát menší než jiné dvojmístné číslo. Toto číslo tedy musí být menší než 25 ($4 \cdot 25 = 100$, a to už je trojmístné).

Po vyškrtnutí sudých číslic má zbýt číslo zapsané lichými číslicemi. Největší takové číslo, které je zároveň menší než 25, je číslo 19. Avšak $4 \cdot 19 = 76$, což není číslo tvořené sudými číslicemi.

Dalším kandidátem je číslo 17. Pro něj platí $4 \cdot 17 = 68$, což je číslo tvořené sudými číslicemi.

Čtyřmístné číslo tedy bylo tvořeno lichými číslicemi 1 a 7 (v tomto pořadí) a sudými číslicemi 6 a 8 (v tomto pořadí), přičemž pořadí lichých a sudých číslic není nijak omezeno. Největší číslo splňující všechny tyto požadavky je 6817. A to je největší číslo, které mohl Kuba zapsat.

Další možnosti není nutné prověřovat: čtyřnásobek čísla menšího než 17 je menší než 68, tedy při splnění ostatních podmínek větší číslo než 6817 dostat nelze.

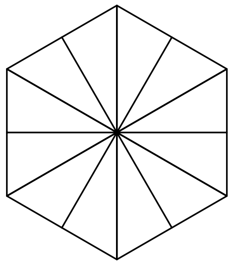
Z6–I–5

Mojmír rozstříhal pravidelný šestiúhelník na 12 shodných dílů. Z těchto dílů (ne nutně ze všech) skládal rozličné pravoúhlé trojúhelníky.

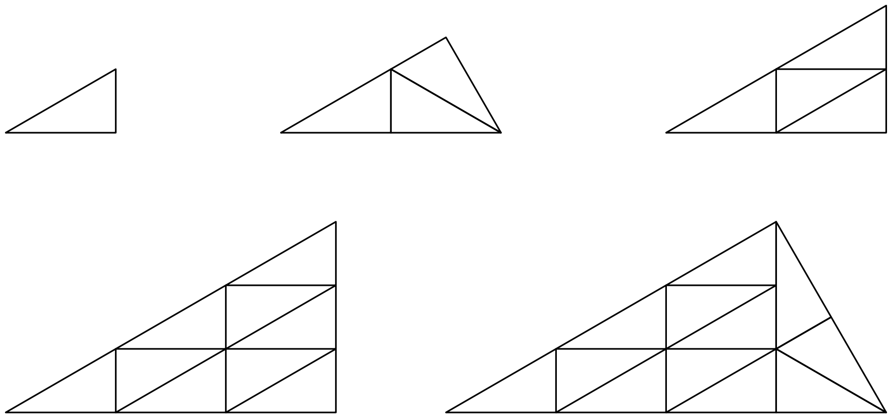
Jak mohly vypadat Mojmírovy složené trojúhelníky? Narýsujte alespoň čtyři možnosti. (*L. Hozová*)

Nápověda. Využijte dělení na šest shodných trojúhelníků.

Možné řešení. Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit na 12 shodných trojúhelníků půlením šesti shodných rovnostranných trojúhelníků, z nichž je pravidelný šestiúhelník utvořen:

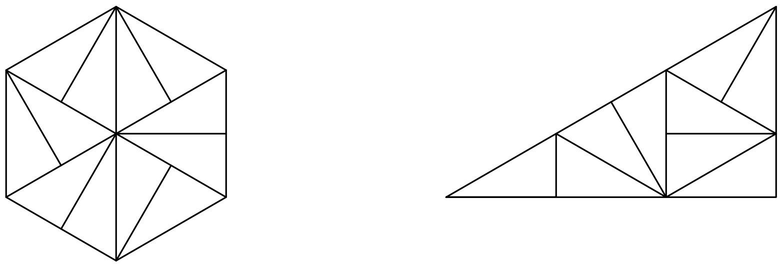


Z těchto trojúhelníků lze složit pravoúhlé trojúhelníky pomocí 1, 3, 4, 9, resp. všech 12 dílů např. takto:

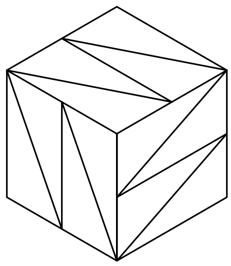


Ke zdůvodnění, že naznačené skládání je v pořádku, je třeba si uvědomit, že použité díly jsou trojúhelníky s vnitřními úhly 30°, 60°a 90°, jejichž nejdelší strana je shodná se stranou původního šestiúhelníku a nejkratší strana je poloviční.

Poznámky. Uvědomte si, že jak rozdělení původního šestiúhelníku, tak seskupení dílů (u větších trojúhelníků) může vypadat velmi různorodě. Proto i různá seskupení dílů v tomtéž trojúhelníku lze považovat za různá řešení úlohy. Viz např. následující ukázky:



Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit na 12 shodných trojúhelníků také následujícím způsobem:



Největší vnitřní úhel v každém z těchto trojúhelníků je $120°$, zbylé dva jsou přibližně $40{,}9°$a $19{,}1°$. Pomocí těchto trojúhelníků však nelze složit pravý úhel.

Pravidelný šestiúhelník lze též rozdělit na 12 shodných dílů netrojúhelníkového tvaru. Z takových dílů se trojúhelníky skládají jen těžko, pokud vůbec.

Z6–I–6

Pětice kamarádů porovnávala, kolik starého železa přivezli do sběru. Průměrně to bylo 55 kg, avšak Ivan přivezl jen 43 kg.

Kolik kg v průměru přivezli bez Ivana? (*L. Hozová*)

Nápověda. O kolik kg se liší Ivanův příspěvek od průměru?

Možné řešení. Ivan přivezl 43 kg, tj. o 12 kg méně, než byl (aritmetický) průměr všech kamarádů. Těchto 12 kg odpovídá průměrně 3 kg na každého ze čtyř zbylých kamarádů ($12 : 4 = 3$).

Bez Ivana kamarádi přivezli průměrně 58 kg železa ($55 + 3 = 58$).

Poznámka. Všech pět kamarádů dohromady přivezlo 275 kg železa ($5 \cdot 55 = 275$). Bez Ivana na ostatní připadlo 232 kg ($275 - 43 = 232$), tedy průměrně na jednoho 58 kg ($232 : 4 = 58$).

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Žížala spirálová razí nový tunel: nejprve míří 10 cm na sever, poté 11 cm na východ, poté 12 cm na jih, 13 cm na západ atd. (každý úsek je o 1 cm delší než předchozí, směry opakuje podle uvedeného vzoru). Žížala souřadnicová mapuje dílo svojí kolegyně: začátek tunelu označí souřadnicemi $[0, 0]$, první odbočku souřadnicemi $[0, 10]$, druhou odbočku $[11, 10]$ atd.

Určete souřadnice konce úseku, který má délku 100 cm. (*I. Jančigová*)

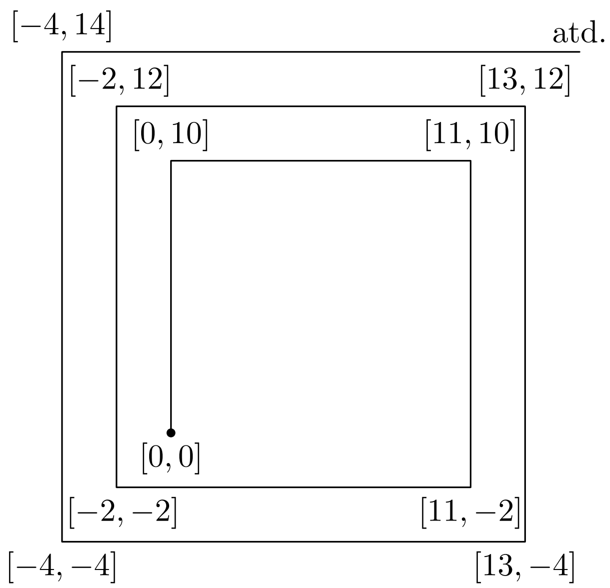
Nápověda. Kterým směrem razila žížala úsek dlouhý 100 cm?

Možné řešení. Délky úseků (v cm) pro jednotlivé směry jsou:

směr	1. kolo	2. kolo	3. kolo	...	k. kolo
sever	10	14	18	...	$6 + 4k$
východ	11	15	19	...	$7 + 4k$
jih	12	16	20	...	$8 + 4k$
západ	13	17	21	...	$9 + 4k$

Úsek dlouhý 100 cm razila žížala ve 23. kole v jižním směru ($8 + 4 \cdot 23 = 100$).

Souřadnice konců těchto úseků jsou $[11, -2]$, $[13, -4]$, $[15, -6]$, ... První souřadnice se postupně zvětšuje o 2, druhá se zmenšuje o 2.



Obecně v k. kole jsou souřadnice konce úseku v jižním směru $[9 + 2k, -2k]$. Pro $k = 23$ dostáváme $[55, -46]$, a to jsou souřadnice konce metrového úseku.

Z7–I–2

Součin věků všech dětí pana Násobka je 1408. Věk nejmladšího dítěte je roven polovině věku nejstaršího dítěte.

Kolik dětí má pan Násobek a kolik je jim let? (*L. Hozová*)

Nápověda. Jak se lze systematicky vyznat v dělitelích daného čísla?

Možné řešení. Prvočíselný rozklad součinu věků dětí je $1408 = 2^7 \cdot 11$. To znamená, že věk právě jednoho z dětí je násobkem 11 a věky ostatních dětí jsou mocninami 2. Protože věk nejstaršího je dvojnásobkem věku nejmladšího, věk ani jednoho z nich není násobkem 11.

Tedy sourozenci jsou alespoň tři, přičemž nejstaršímu je jistě víc než 11 let. Z úvodního rozkladu zjišťujeme, že nejstaršímu je 16 let, nejmladšímu 8 let a že žádný další sourozenec není:

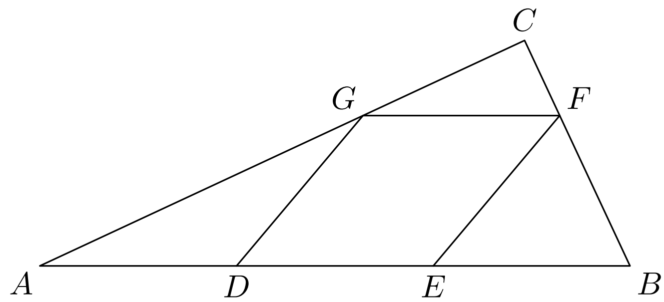
$$1408 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2).$$

Pan Násobek má tři děti staré 8, 11 a 16 let.

Z7–I–3

Na stranách trojúhelníku ABC jsou dány body D, E, F, G, viz obrázek. Přitom platí, že čtyřúhelník $DEFG$ je kosočtverec a úsečky AD, DE a EB jsou navzájem shodné.

Určete velikost úhlu ACB. (*I. Jančigová*)

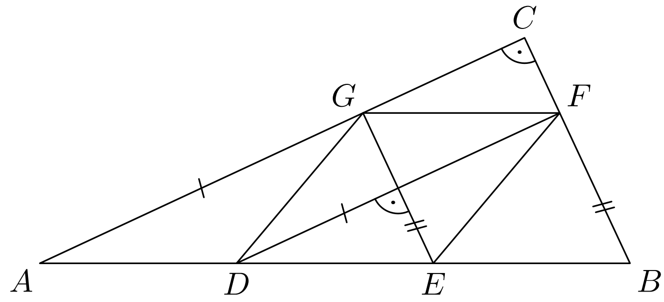


Nápověda. Jaká je vzájemná poloha přímek AC a DF?

Možné řešení. Podle předpokladů jsou úsečky AD a GF rovnoběžné a shodné. Tedy čtyřúhelník $ADFG$ je rovnoběžníkem, zejména přímky AG a DF jsou rovnoběžné.

Obdobnou úvahou lze ukázat, že také přímky BF a EG jsou rovnoběžné.

Jelikož úhlopříčky DF a EG kosočtverce $DEFG$ jsou kolmé, jsou kolmé také přímky AG a BF. Bod C je průsečíkem těchto přímek, tedy úhel ACB je pravý.

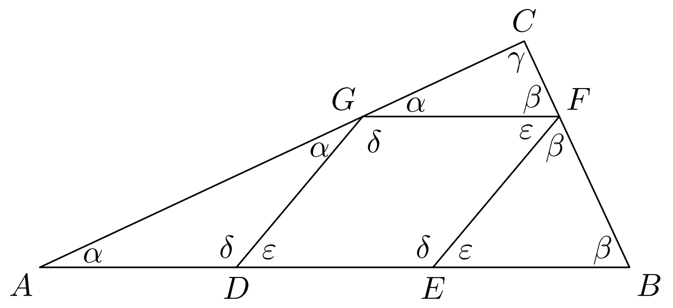


Jiné řešení. Podle předpokladů jsou přímky AB a GF rovnoběžné, tudíž úhly DAG a FGC jsou shodné (souhlasné úhly). Dále trojúhelník ADG je rovnoramenný (AD a DG jsou shodné), tudíž úhly DAG a DGA jsou shodné. Tyto tři navzájem shodné úhly označíme symbolem α, viz obrázek.

Obdobně lze ukázat, že úhly EBC, GFC a EFB jsou navzájem shodné; tyto úhly označíme β.

Z rovnoběžnosti přímek AB a GF také plyne, že úhly ADG a DGF jsou shodné (střídavé úhly). Dále protilehlé úhly v rovnoběžníku $DEFG$ jsou shodné, zejména DGF je shodný s DEF. Tyto tři navzájem shodné úhly označíme symbolem δ.

Obdobně úhly BEF, EFG a EDG jsou navzájem shodné; tyto úhly označíme ε.



Mezi uvedenými úhly platí několik vztahů, z nichž vybíráme:

- $\varepsilon = 2\alpha$ (vnější úhel trojúhelníku ADG),
- $\varepsilon + 2\beta = 180°$ (součet vnitřních úhlů trojúhelníku EBF),
- $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (součet vnitřních úhlů trojúhelníku GFC).

Z prvních dvou rovností vyplývá, že $2\alpha + 2\beta = 180°$, tedy $\alpha + \beta = 90°$. Dosazením do třetí rovnosti dostáváme $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90°$. Tedy úhel ACB je pravý.

Z7–I–4

Pepík vymyslel následující úlohu:

$$M + A + M + R + A + D + M + A + T + E + M + A + T + I + K + U = ?$$

Různá písmena nahrazoval různými číslicemi od 1 do 9 a zjišťoval, co vychází.

a) Jaký největší výsledek mohl Pepík dostat?
b) Mohl dostat výsledek 50? Pokud ano, jak?
c) Mohl dostat výsledek 59? Pokud ano, určete jaké všechny hodnoty mohl mít součet $M + A + M$.

(*M. Smitková*)

Nápověda. Kolikrát se která písmena opakují?

Možné řešení. Písmena M a A jsou v Pepíkově úloze zastoupena čtyřikrát, T dvakrát, ostatní písmena po jednom. Při jakémkoli nahrazení číslic za písmena je součet navzájem různých číslic roven $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$. Uvedenou úlohu tedy můžeme zjednodušeně zapsat jako

$$3M + 3A + T + 45 = ?$$

(Záměna M a A nemá vliv na celkový součet a tyto možnosti v dalším nerozlišujeme.)

a) Má-li být součet největší možný, musíme nejčetnější písmena nahrazovat co možná největšími číslicemi. Takto pro $M = 9$, $A = 8$ a $T = 7$ dostáváme

$$3 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 7 + 45 = 103.$$

b) Součet 50 není možný, neboť nahrazení s nejmenším možným součtem je $M = 1$, $A = 2$ a $T = 3$, a to dává

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 + 45 = 57.$$

c) Má-li být součet 59, musí být $3M + 3A + T = 14$ neboli $3(M + A) = 14 - T$. Nahrazení za T musí být takové, aby rozdíl $14 - T$ byl dělitelný třemi. Mezi čísly od 1 do 9 máme následující tři možnosti:

   - Pro $T = 2$ vychází $M + A = 4$. Tedy může být buď $M = 1$ a $A = 3$, nebo $M = 3$ a $A = 1$. Hledaný součet $M + A + M$ je buď 5, nebo 7.
   - Pro $T = 5$ vychází $M + A = 3$. Tedy může být buď $M = 1$ a $A = 2$, nebo $M = 2$ a $A = 1$. Hledaný součet $M + A + M$ je buď 4, nebo 5.
   - Pro $T = 8$ vychází $M + A = 2$. Pro tuto hodnotu nelze M a A nahradit navzájem různými číslicemi.

   Celkový součet 59 je možný; dílčí součet $M + A + M$ může být 4, 5, nebo 7.

Z7–I–5

Honza vyrazil do světa s rancem buchet. Na prvním rozcestí potkal Dlouhého, Širokého a Bystrozrakého a spravedlivě se s nimi o své buchty rozdělil — každý dostal čtvrtinu buchet. Honza ze svého dílu ujedl dvě buchty a vyrazil dál.

Na druhém rozcestí potkal Jeníčka a Mařenku a i s nimi se spravedlivě rozdělil — každý dostal třetinu zbylých buchet. Honza ze svého dílu snědl zase dvě buchty a se zbylými vyrazil dál.

Na třetím rozcestí potkal Sněhurku. I s tou se spravedlivě rozdělil, takže oba měli polovinu zbylých buchet. Když Honza snědl opět svoje dvě buchty, byl ranec prázdný, a tak se vrátil domů.

S kolika buchtami vyrazil Honza do světa? (*M. Petrová*)

Nápověda. S kolika buchtami přišel Honza na třetí rozcestí?

Možné řešení. Úlohu můžeme s výhodou řešit odzadu:

- Na třetím rozcestí Honza snědl poslední 2 buchty, což byla polovina z toho, co na toto rozcestí přinesl. Na třetí rozcestí tedy přišel se 4 buchtami, a to je také počet, se kterým odcházel z rozcestí druhého.
- Na druhém rozcestí snědl 2 buchty (a pak vyrazil dál). Před tím jich tedy měl 6, což byla třetina z toho, co na toto rozcestí přinesl. Na druhé rozcestí tedy přišel s 18 buchtami, a to je také počet, se kterým odcházel z rozcestí prvního.
- Na prvním rozcestí snědl 2 buchty (a pak vyrazil dál). Před tím jich tedy měl 20, což byla čtvrtina z toho, co na toto rozcestí přinesl. Na první rozcestí tedy přišel s 80 buchtami, a to je také počet, se kterým odcházel z domova.

Honza vyrazil do světa s 80 buchtami.

Poznámka. Předchozí úvahy jsou zhutněny v následující tabulce:

rozcestí	zbylo	přinesl
3	0	$2 \cdot 2 = 4$
2	4	$(4 + 2) \cdot 3 = 18$
1	18	$(18 + 2) \cdot 4 = 80$

Z7–I–6

Pan Chrt měl ve svém psím spřežení pět psů — Alíka, Broka, Muka, Rafa a Punťu. Přemýšlel, jak by mohl psy zapřáhnout do řady za sebe tak, aby Alík byl před Punťou.

Kolika způsoby to mohl pan Chrt udělat? (*L. Hozová*)

Nápověda. Na jakých místech mohli být zapřaženi Alík a Punťa?

Možné řešení. Pokud by byl Alík první, Punťa by mohl být druhý, třetí, čtvrtý, nebo pátý:

$$AP{*}{*}{*} \quad A{*}P{*}{*} \quad A{*}{*}P{*} \quad A{*}{*}{*}P$$

Pokud by byl Alík druhý, Punťa by mohl být třetí, čtvrtý, nebo pátý:

$$*AP{*}{*} \quad {*}A{*}P{*} \quad {*}A{*}{*}P$$

Pokud by byl Alík třetí, Punťa by mohl být čtvrtý, nebo pátý:

$${*}{*}AP{*} \quad {*}{*}A{*}P$$

Pokud by byl Alík čtvrtý, Punťa by musel být pátý:

$${*}{*}{*}AP$$

Tedy pan Chrt měl 10 možností, jak zapřáhnout Alíka a Punťu požadovaným způsobem.

V každém z těchto případů mohli být zbylí tři psové zapřaženi na neobsazená místa (označená $*$) libovolně. A to lze provést 6 způsoby: jeden pes může na kterékoli ze tří volných míst, druhý pes na kterékoli ze dvou zbývajících míst, třetí pes nemá na vybranou a musí na poslední volné místo (tedy $6 = 3 \cdot 2$).

Pan Chrt mohl svoje psy zapřáhnout celkem 60 způsoby (neboť $10 \cdot 6 = 60$).

Poznámka. Předchozí počítání všech možných pořadí tří prvků lze zobecnit pro libovolný počet; výslednému číslu se říká *faktoriál* a značí se vykřičníkem (zde $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$).

Všech pět psů pana Chrta lze zapřáhnout celkem $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ způsoby. Přitom v polovině případů stojí Alík před Punťou a v polovině případů je tomu naopak (stačí zaměnit tyto dva psy a ostatní nechat na svých místech). Tedy Alík před Punťou může být v 60 případech.

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Věrka ze tří daných číslic sestavovala navzájem různá trojmístná čísla, přičemž u každého čísla použila všechny tři číslice. Takto sestavila všechna možná čísla a když je sečetla, vyšlo jí 1221.

Jaké číslice Věrka použila? Určete pět možností. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Mohla být některá z číslic 0?

Možné řešení. Aby Věrka mohla z daných číslic sestavit trojmístné číslo, musela být alespoň jedna číslice nenulová. Aby byl součet všech sestavených čísel čtyřmístný, musela sestavit alespoň dvě trojmístná čísla. Odtud vyplývá, že dané číslice nemohly být stejné a nanejvýš jedna z nich byla nulová.

V následujícím prověříme všechny možnosti (různá písmena označují různé nenulové číslice):

- S jednou číslicí nulovou a zbylými dvěma nenulovými různými lze sestavit čísla $\overline{ab0}$, $\overline{ba0}$, $\overline{a0b}$, $\overline{b0a}$. Jejich součet je roven
$$(2a + 2b) \cdot 100 + (a + b) \cdot 10 + (a + b) = 211(a + b).$$
Číslo 1221 však není dělitelné 211, tímto způsobem tedy požadovaný součet dostat nelze.
- S jednou číslicí nulovou a zbylými dvěma stejnými lze sestavit čísla $\overline{aa0}$, $\overline{a0a}$. Jejich součet je roven
$$2a \cdot 100 + a \cdot 10 + a = 211a.$$
Ze stejného důvodu jako v předchozím případě takto požadovaný součet dostat nelze.
- S třemi navzájem různými nenulovými číslicemi lze sestavit čísla $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$. Jejich součet je roven
$$(2a + 2b + 2c) \cdot 100 + (2a + 2b + 2c) \cdot 10 + (2a + 2b + 2c) = 222(a + b + c).$$
Číslo 1221 však není dělitelné 222, tímto způsobem tedy požadovaný součet dostat nelze.
- Se dvěma stejnými nenulovými číslicemi a třetím různým nenulovým lze sestavit čísla $\overline{aab}$, $\overline{aba}$, $\overline{baa}$. Jejich součet je roven
$$(2a + b) \cdot 100 + (2a + b) \cdot 10 + (2a + b) = 111(2a + b).$$
Protože $1221 = 111 \cdot 11$, lze požadovaný součet dostat právě tehdy, když $2a+b = 11$ neboli $b = 11 - 2a$. Mezi číslicemi od 1 do 9 vyhovují této podmínce právě dvojice:
$$a = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$
$$b = 9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1.$$

Věrka mohla použít kteroukoli z následujících trojic číslic:
$$(1, 1, 9), \quad (2, 2, 7), \quad (3, 3, 5), \quad (4, 4, 3), \quad (5, 5, 1).$$

Z8–I–2

TRN a HAM jsou shodné rovnostranné trojúhelníky. Přitom bod T je těžištěm trojúhelníku HAM a bod R leží na polopřímce TA.

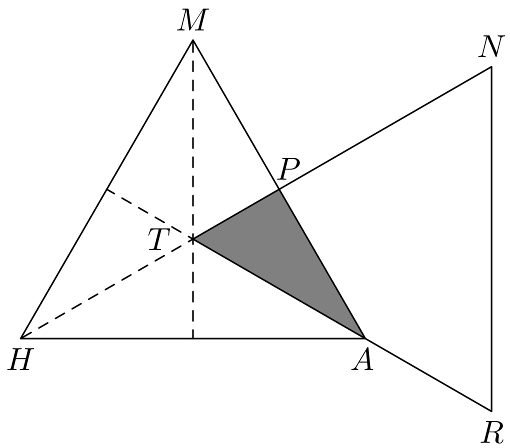
Jaký je poměr obsahů částí trojúhelníku TRN, které jsou uvnitř a vně trojúhelníku HAM? (*E. Semerádová*)

Nápověda. Těžiště je průsečíkem těžnic.

Možné řešení. Těžiště je průsečíkem těžnic, a ty jsou v rovnostranném trojúhelníku současně výškami i osami vnitřních úhlů. Těmito přímkami je trojúhelník HAM rozdělen na šest navzájem shodných trojúhelníků.

Zejména velikosti vnitřních úhlů každého z těchto trojúhelníků jsou $90°$ u vrcholů na stranách HAM (pata výšky), $30°$ u vrcholů HAM (polovina vnitřního úhlu rovnostranného trojúhelníku) a $60°$ u vrcholu T (aby součet všech byl $180°$).

Označme P průsečík stran trojúhelníků HAM a TRN. Trojúhelník ATP je společnou částí trojúhelníků HAM a TRN. Porovnáním vnitřních úhlů u vrcholu T zjišťujeme, že trojúhelník ATP je jedním ze šesti výše zmiňovaných shodných trojúhelníků.



Trojúhelníky HAM a TRN jsou shodné a jejich společná část představuje $\frac{1}{6}$ obsahu každého. Proto část trojúhelníku TRN, která leží vně trojúhelníku HAM, představuje $\frac{5}{6}$ jeho obsahu. Poměr obsahů těchto částí je $1 : 5$.

Poznámka. Ze zadání nevíme, zda bod P leží na straně AM, nebo AH. Volba na obrázku není podstatná, v obou případech jsou závěry i jejich zdůvodnění stejné.

Z8–I–3

Na nově objevené planetě žijí zvířata, která astronauti pojmenovali podle počtu nohou jednonožky, dvounožky, trojnožky atd. (zvířata bez nohou nebyla nalezena). Zvířata s lichým počtem nohou mají dvě hlavy, zvířata se sudým počtem nohou mají jednu hlavu. V jisté prohlubni potkali skupinu takových zvířat a napočítali u nich 18 hlav a 24 nohou.

Kolik zvířat mohlo být v prohlubni? Určete všechny možnosti. (*T. Bárta*)

Nápověda. Počty hlav i nohou v prohlubni jsou sudé.

Možné řešení. Protože celkový počet hlav zvířat v prohlubni byl sudý, musel být počet jednohlavých zvířat sudý. Protože jednohlavá zvířata mají sudé počty nohou, dvouhlavá zvířata mají liché počty nohou a celkový počet nohou byl sudý, musel být počet dvouhlavých zvířat také sudý. Protože nohou bylo celkem 24, nemohlo být jednohlavých zvířat víc než 12.

Označme počet jednohlavých, resp. dvouhlavých zvířat v prohlubni j, resp. d. Předchozí závěry odpovídají požadavkům, aby j a d byla kladná sudá čísla a $j \leqq 12$. Informace o počtu hlav navíc znamená $j + 2d = 18$. Všem těmto požadavkům vyhovují právě následující dvojice čísel:

$$j = 2,\ 6,\ 10,$$
$$d = 8,\ 6,\ 4.$$

Pro každou z uvedených možností je třeba ověřit, zda mohla skutečně nastat, tj. zda existuje příklad počtů jednotlivých druhů zvířat se správným celkovým počtem nohou:

- Pro $j = 2$ a $d = 8$ mohlo jít např. o 2 čtyřnožky, 4 jednonožky a 4 trojnožky ($2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 24$).
- Pro $j = 6$ a $d = 6$ mohlo jít např. o 6 dvounožek, 3 jednonožky a 3 trojnožky ($6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 24$).
- Pro $j = 10$ a $d = 4$ mohlo jít o 10 dvounožek a 4 jednonožky ($10 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 24$).

V prohlubni mohlo být 10, 12, nebo 14 zvířat.

Z8–I–4

V dané skupině čísel je jedno číslo rovno průměru všech, největší číslo je o 7 větší než průměr, nejmenší je o 7 menší než průměr a většina čísel ze skupiny má podprůměrnou hodnotu.

Jaký nejmenší počet čísel může být ve skupině? (*K. Pazourek*)

Nápověda. Jaký je průměr tří blížeji popsaných čísel ze skupiny?

Možné řešení. Označme průměr čísel ve skupině p. Nejmenší číslo ze skupiny je $p - 7$, největší $p + 7$. Průměr těchto tří čísel je p, průměr zbylých čísel ze skupiny proto musí být tentýž.

Tedy některá ze zbylých čísel musí být menší, některá větší než p. Aby navíc většina čísel byla podprůměrných, musí být těch, která jsou menší než p, alespoň o dvě víc než těch, která jsou větší než p.

Ve skupině je nejméně sedm čísel, schematicky uspořádaných následovně:

$$p - 7, \quad *, \quad *, \quad *, \quad p, \quad *, \quad p + 7.$$

Poznámky. Vyhovujících sedmic čísel je neomezené množství; lze je popsat např. takto

$$p - 7, \quad p - a, \quad p - b, \quad p - c, \quad p, \quad p + d, \quad p + 7,$$

kde $0 < a, b, c, d \leqq 7$ a $a + b + c = d$. (Příkladem může být sedmice -7, -4, -1, -1, 0, 6, 7.)

Formální zdůvodnění úvodního postřehu vyplývá z definice (aritmetického) průměru: pokud zbylých čísel ze skupiny je n a jejich součet je s, potom jejich průměr je $\frac{s}{n}$, zatímco průměr všech je $\frac{s+3p}{n+3} = p$. Úpravami druhého výrazu dostáváme $\frac{s}{n} = p$.

Úlohu je možné řešit postupným zvyšováním počtu čísel ve skupině a ověřováním všech zadaných podmínek.

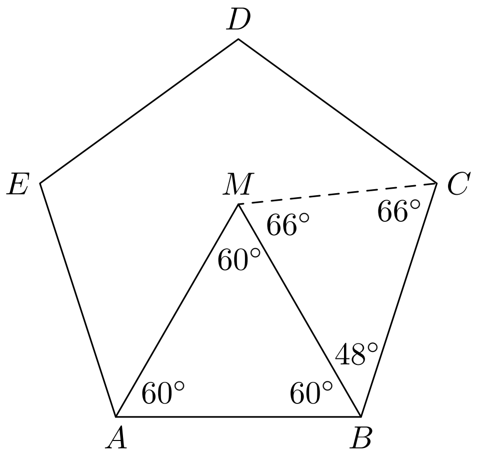
Z8–I–5

V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ je obsažen rovnostranný trojúhelník ABM. Určete velikost úhlu BCM. *(L. Hozová)*

Nápověda. Jaké jsou velikosti vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku?

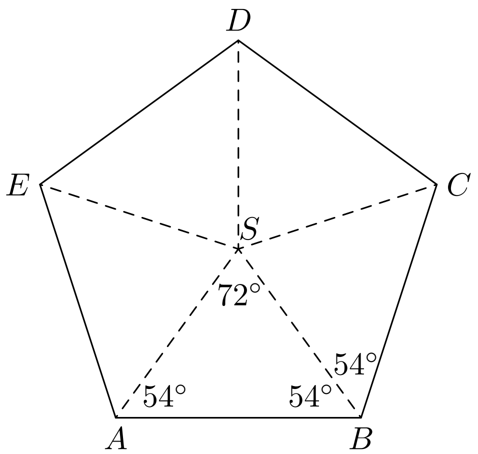
Možné řešení. Velikost vnitřních úhlů rovnostranného trojúhelníku je $60°$, velikost vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku je $108°$. U vrcholu B tak zjišťujeme, že velikost úhlu CBM je $108° - 60° = 48°$.

Úsečky AB, BC a BM jsou navzájem shodné, tedy trojúhelník CBM je rovnoramenný se základnou CM. Vnitřní úhly u základny jsou shodné a součet všech je přímý úhel. Velikost úhlu BCM je proto rovna $\frac{1}{2}(180° - 48°) = 66°$.



Poznámka. Obecný n-úhelník lze rozdělit na $n - 2$ trojúhelníky (jejichž vrcholy jsou vrcholy n-úhelníku), tedy součet velikostí jeho vnitřních úhlů je $(n-2)\cdot 180°$. Pravidelný n-úhelník má všechny vnitřní úhly shodné, tedy velikost každého je $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Odtud plynou úvodní vztahy pro $n = 3$ a $n = 5$.

Pravidelný n-úhelník lze též rozdělit na n shodných rovnoramenných trojúhelníků se společným vrcholem ve středu n-úhelníku. Pro $n = 5$ dostáváme, že úhel ASB má velikost $\frac{1}{5} \cdot 360° = 72°$, tedy že úhly SAB, SBA atd. mají velikost $\frac{1}{2}(180° - 72°) = 54°$.



Z8–I–6

Alenka dostala list papíru s následujícím sdělením:

A. *Nejvýše jedno z tvrzení A, B, C, D, E je pravdivé.*
B.
C. *Všechna tvrzení A, B, C, D, E jsou pravdivá.*
D.
E. *Tvrzení A je pravdivé.*

Tvrzení B a D byla napsána neviditelným inkoustem, který lze přečíst jen pod speciální lampou. Než Alenka takovou lampu našla, dokázala rozhodnout, zda může těmto tvrzením důvěřovat.

Určete i vy, která z tvrzení A, B, C, D, E jsou pravdivá a která nepravdivá.

(*I. Jančigová*)

Nápověda. Postupujte systematicky a promýšlejte všechny důsledky.

Možné řešení. Pokud by tvrzení A bylo pravdivé, potom by také tvrzení E bylo pravdivé. To by však byla pravdivá dvě tvrzení, což by bylo v rozporu s tvrzením A.

Pokud by tvrzení C bylo pravdivé, potom by všechna tvrzení měla být pravdivá. To by však bylo pravdivých tvrzení víc než jedno, což by bylo v rozporu s tvrzením A.

Pokud by tvrzení E bylo pravdivé, potom by tvrzení A mělo být také pravdivé. To by však byla pravdivá dvě tvrzení, což by bylo v rozporu s tvrzením A.

Tedy všechna viditelná tvrzení jsou nepravdivá. Z nepravdivosti A vyplývá, že alespoň dvě ze všech tvrzení jsou pravdivá, a to musí být ta neviditelná.

Tvrzení B, D jsou pravdivá, tvrzení A, C, E jsou nepravdivá.

Poznámka. V předchozím tiše předpokládáme, že každé z tvrzení je buď pravdivé, nebo nepravdivé (odborně mluvíme o *výrocích*). Uvědomte si, že existují problematická sdělení, o jejichž pravdivosti či nepravdivosti nelze rozhodnout (viz např. *Toto tvrzení je nepravdivé*).

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Adam, Bořek a Čenda porovnávali, kolik kg kaštanů nasbírali. Zjistili, že aritmetický průměr toho, co nasbíral Adam s Bořkem, je o 10 kg větší než Čendův příspěvek. A aritmetický průměr toho, co nasbíral Adam s Čendou, je o 3 kg menší než Bořkův příspěvek.

Určete rozdíl mezi aritmetickým průměrem toho, co nasbíral Bořek s Čendou, a Adamovým příspěvkem. (*M. Petrová*)

Nápověda. Vyjádřete vztahy ze zadání pomocí neznámých.

Možné řešení. Množství kaštanů (v kg) nasbírané Adamem, Bořkem a Čendou označíme po řadě a, b a c. Podle zadání platí

$$\frac{a+b}{2} = c + 10, \quad \frac{a+c}{2} = b - 3.$$

Chceme určit rozdíl mezi $\frac{b+c}{2}$ a a. K tomu stačí předchozí dvě rovnice sečíst a upravit:

$$\begin{aligned} a + \frac{b+c}{2} &= b + c + 7, \\ a - 7 &= \frac{b+c}{2}. \end{aligned}$$

Adamův příspěvek je o 7 kg větší než aritmetický průměr toho, co nasbíral Bořek s Čendou.

Poznámky. Pokud bychom hledaný rozdíl označili x a k úvodním dvěma rovnicím přidali $\frac{b+c}{2} = a - x$, potom součet všech tří rovnic (a jednoduchá úprava) dává $x = 7$.

Úvodní dvojice rovnic je ekvivalentní dvojici

$$a + b - 2c = 20, \quad a - 2b + c = -6.$$

Odtud lze vyjádřit dvě z neznámých pomocí třetí, a to např. takto

$$b = \frac{26}{3} + c, \quad a = \frac{34}{3} + c. \tag{$*$}$$

Hledaný rozdíl potom vychází

$$a - \frac{b+c}{2} = \frac{34}{3} + c - \frac{26}{6} - c = \frac{21}{3} = 7.$$

Bez dodatečné informace nelze určit, kolik jednotliví chlapci nasbírali (méně rovnic než neznámých). Z předchozího postupu je však patrné, že úloha je realizovatelná: ať už Čenda nasbíral cokoli, je c nezáporné, a z vyjádření ($*$) vyplývá, že příspěvky ostatních chlapců a a b jsou též nezáporné.

Z9–I–2

Jana si vymyslela 2022místné číslo a jeho ciferný součet pošeptala Petrovi. Petr vypočítal ciferný součet čísla, které mu sdělila Jana, a výsledek pošeptal Zuzce. Zuzka též vypočítala ciferný součet čísla, které dostala od Petra, a výsledek, jímž bylo dvojmístné číslo, pošeptala Adamovi. Adam provedl totéž s číslem od Zuzky a vyšel mu ciferný součet 1.

Která čísla mohl šeptat Petr Zuzce? Určete všechny možnosti. (*I. Jančigová*)

Nápověda. Jaký největší ciferný součet může mít 2022místné číslo?

Možné řešení. Ciferný součet 2022místného čísla může být nanejvýš $2022 \cdot 9 = 18198$ (tj. pro číslo tvořené samými devítkami). To je zároveň největší číslo, které mohla pošeptat Jana Petrovi.

Ciferný součet čísla, které je menší nebo rovno 18198, může být nanejvýš 36 (pro číslo 9999). To je zároveň největší číslo, které mohl pošeptat Petr Zuzce.

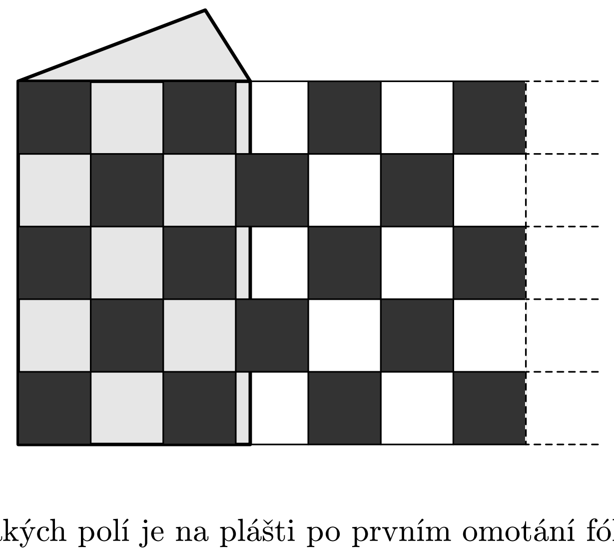
Avšak Zuzka Adamovi pošeptala dvojmístné číslo s ciferným součtem 1, tj. jedině číslo 10. Petr Zuzce tedy pošeptal číslo menší nebo rovno 36 s ciferným součtem 10, tj. buď 19, nebo 28.

Poznámka. Ciferné součty mohou být v daných mezích jakékoliv, tedy jistě existují 2022místná čísla vyhovující všem uvedeným informacím. Např. číslo tvořené jednou jedničkou, 22 devítkami a ostatními číslicemi nulovými má ciferný součet $1+22 \cdot 9 = 199$, to má ciferný součet 19 atd.

Z9–I–3

Je dán pravidelný trojboký hranol s podstavnou hranou délky 3,2 cm a výškou 5 cm. Jeho plášť omotáváme šachovnicovou fólií, která sestává z neprůhledných a průhledných čtvercových polí se stranami délky 1 cm. Začátek fólie lícuje s hranou hranolu (viz obrázek) a délka fólie vystačí právě na dvojí omotání celého pláště.

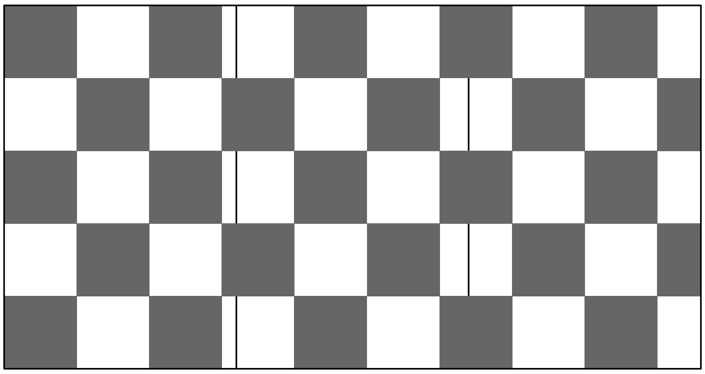
Kolik procent pláště hranolu bude přes fólii po omotání vidět? Tloušťku fólie zanedbejte. (*K. Pazourek*)



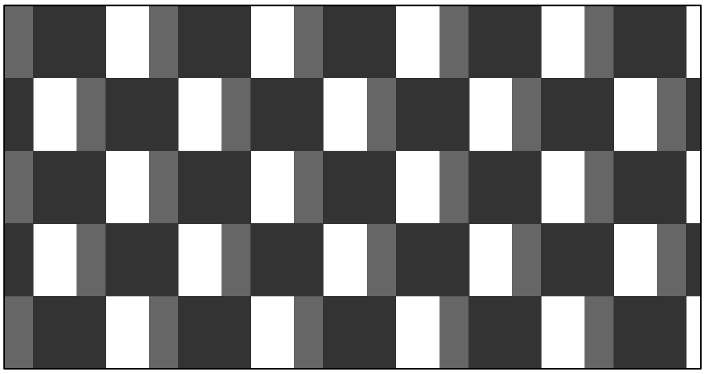
Nápověda. Kolik jakých polí je na plášti po prvním omotání fólie?

Možné řešení. Plášť hranolu tvoří tři shodné obdélníky s rozměry 3,2 cm × 5 cm, rozvinutý plášť je obdélník s rozměry 9,6 cm × 5 cm, obsah pláště je $48\,\text{cm}^2$.

Po prvním omotání vypadá rozvinutý plášť následovně (pro rozlišení vrstev používáme různé odstíny šedé):



Na délce 9,6 cm vychází pole šachovnice následovně: 22 průhledných polí jsou celé čtverce, 3 průhledná pole jsou obdélníky se šířkou 0,6 cm (a výškou 1 cm). O chybějící 0,4 cm je fólie posunuta při druhém omotání:



Všechna průhledná pole jsou tak zmenšena o 0,4 cm své šířky. Celkem po dvojím omotání je průhledná část tvořena 22 obdélníky s rozměry 0,6 cm $\times$ 1 cm a 3 obdélníky s rozměry 0,2 cm $\times$ 1 cm. Přes fólii je tedy vidět 13,8 cm^2 pláště hranolu ($22 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}2 = 13{,}8$), což z celkového obsahu 48 cm^2 představuje 28,75 % ($13{,}8 : 48 = 0{,}2875$).

Z9–I–4

Deltoid je konvexní čtyřúhelník s jedinou osou souměrnosti. Deltoid $ABCD$ je souměrný podle úhlopříčky AC se stranou AB délky 5 cm, se stranou BC délky 3 cm a s úhlem BCD velikosti 60°. Bod E je patou kolmice z vrcholu B na stranu AD a F je patou kolmice z vrcholu D na stranu BC.

Určete obvod a obsah čtyřúhelníku $DEBF$. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Rozdělte útvary na části podle úhlopříčky BD.

Možné řešení. Z osové souměrnosti deltoidu plyne, že trojúhelníky BCD a BAD jsou rovnoramenné. Trojúhelník BCD je navíc rovnostranný, neboť úhel BCD má velikost 60°. Tedy pata výšky z vrcholu D je středem úsečky BC a velikosti dvou ze čtyř stran čtyřúhelníku $DEBF$ jsou

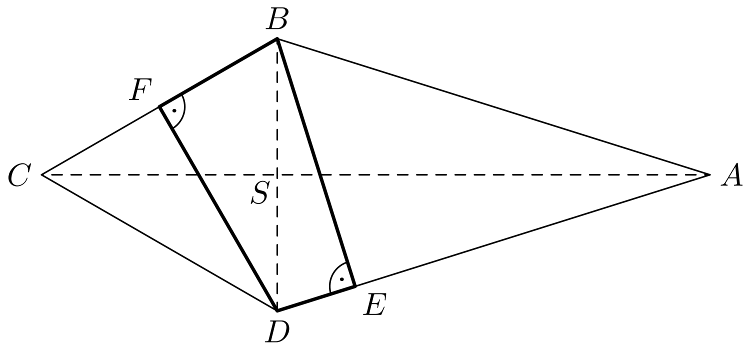
$$|BF| = \frac{3}{2}\,\text{cm}, \quad |FD| = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}.$$

Úhlopříčky deltoidu jsou navzájem kolmé, jejich průsečík označíme S. Trojúhelník BED je podobný trojúhelníku ASD, neboť oba jsou pravoúhlé a mají společný úhel u vrcholu D. Odtud lze porovnáním vhodných stran vyjádřit velikost úsečky DE; z rovností $|DE| : |DB| = |DS| : |DA|$ a $|DS| = \frac{1}{2}|DB|$ dostáváme

$$|DE| = \frac{|DB|^2}{2|DA|} = \frac{9}{10}\,(\mathrm{cm}).$$

Z Pythagorovy věty v trojúhelníku BED umíme vyjádřit velikost poslední strany čtyřúhelníku $DEBF$:

$$|BE| = \sqrt{|BD|^2 - |DE|^2} = \sqrt{\frac{819}{100}} = \frac{3\sqrt{91}}{10}\,(\mathrm{cm}).$$



Obvod čtyřúhelníku $DEBF$ je roven

$$|BF| + |FD| + |DE| + |EB| = \frac{24}{10} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{91}}{10} \doteq 7{,}86\,(\mathrm{cm}).$$

Obsah čtyřúhelníku $DEBF$ je roven

$$\frac{1}{2}\big(|BF| \cdot |FD| + |DE| \cdot |EB|\big) = \frac{9\sqrt{3}}{8} + \frac{27\sqrt{91}}{200} \doteq 3{,}24\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámky. Ve vyjádření velikosti FD odkazujeme na dobře známý vzoreček pro výšku rovnostranného trojúhelníku (který je odvozen z Pythagorovy věty v trojúhelníku BFD).

Velikost BE lze odvodit z dvojího vyjádření obsahu trojúhelníku ABD, přesněji z rovnosti $|BE| \cdot |AD| = |AS| \cdot |BD|$, kde $|AS| = \frac{\sqrt{91}}{2}$ cm je vypočteno z Pythagorovy věty v trojúhelníku ABS.

Z9–I–5

Vodník Kebule nakupoval v rybárně kapitána Nema, kde ceny všeho zboží byly uvedeny v celých šupinkách. Kdyby Kebule koupil 2 raky, 3 škeble a 1 štiku, zaplatil by 49 šupinek. Pokud by přikoupil ještě 5 raků, 11 škeblí a 1 štiku, platil by celkem 154 šupinek.

Kolik šupinek by platil za 1 raka, 2 škeble a 3 štiky? Určete všechny možnosti.

(*K. Pazourek*)

Nápověda. Vyjádřete vztahy ze zadání pomocí neznámých.

Možné řešení. Označme po řadě r, k a t počet šupinek, které stojí jeden rak, jedna škeble a jedna štika. Informace o prvním uvažovaném nákupu znamená

$$2r + 3k + t = 49. \tag{1}$$

Za přikoupené zboží by Kebule doplácel $154 - 49 = 105$ šupinek, tedy

$$5r + 11k + t = 105. \tag{2}$$

Odečtením první rovnice od druhé dostáváme

$$3r + 8k = 56.$$

Neznámé r a k jsou celá čísla a

$$k = 7 - \frac{3}{8}r, \tag{3}$$

proto r musí být dělitelné osmi. Neznámé r a k jsou navíc kladná čísla, tedy r může být buď 8, nebo 16.

Pro $r = 8$ a 16 umíme vyjádřit k podle (3) a t pomocí (1), resp. (2). Pokud také t vyjde kladné, dopočítáme hledanou cenu za 1 raka, 2 škeble a 3 štiky:

r	k	t	$r + 2k + 3t$
8	4	21	79
16	1	14	60

Kebule by za 1 raka, 2 škeble a 3 štiky mohl platit buď 79, nebo 60 šupinek.

Poznámka. Dělitelnost čísla r osmi znamená, že $r = 8r'$, kde r' je nějaké celé číslo. Odtud podle (3) vychází $k = 7 - 3r'$ a pomocí (1), resp. (2) dostáváme $t = 28 - 7r'$. Hledaný součet je pak roven $r + 2k + 3t = 98 - 19r'$ a sloupce v předchozí tabulce odpovídají

$8r'$	$7 - 3r'$	$28 - 7r'$	$98 - 19r'$

Všechna čísla jsou kladná, právě když r' je buď 1, nebo 2, což souhlasí s výše uvedenými omezeními.

Z9–I–6

Jsou dána dvě různá čísla. Pokud od každého čísla odečteme čtvrtinu menšího čísla, dostaneme čísla, z nichž jedno bude pětkrát větší než druhé.

Kolikrát je dané větší číslo větší než to menší? (*L. Hozová*)

Nápověda. Hrají nějakou roli znaménka uvažovaných čísel?

Možné řešení. Daná čísla označíme m a v, přičemž $m < v$. Uvedená relace se nezmění, pokud od obou čísel odečteme (jakékoli) stejné číslo. Zejména platí

$$\frac{3}{4}m < v - \frac{1}{4}m.$$

Aby jedno z čísel v předchozí nerovnosti bylo pětinásobkem druhého, musí mít obě stejná znaménka:

- Pokud jsou obě čísla kladná, potom

$$5 \cdot \frac{3}{4}m = v - \frac{1}{4}m.$$

  Odtud dostáváme $v = \frac{16}{4}m = 4m$.
- Pokud jsou obě čísla záporná, potom

$$\frac{3}{4}m = 5 \cdot (v - \frac{1}{4}m).$$

  Odtud dostáváme $5v = \frac{8}{4}m$, tedy $v = \frac{2}{5}m$.

Vztah mezi danými čísly je buď $v = 4m$, nebo $v = \frac{2}{5}m$.

Poznámka. Z uvedeného mj. plyne, že daná čísla mají stejná znaménka.